Chapitre 16 : compléments sur les espaces vectoriels
Feuille d'exercices

Exercice 1 Soient $u = (1, 2, 3)$; $v = (0, 1, -1)$; $w = (1, 3, 2)$; $z = (0, 0, 0)$; $t = (2, 4, 6)$ et soit $\mathcal{F} = (u, v, w, z, t)$. Extraire une base de $\mathcal{F}$.

Exercice 2 (*) Sur la dimension d'espaces vectoriels.

1. Montrer que l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ puis celle de $A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1. Quel est le rang de la famille (u, v, w) ? Donnez une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
   (a) Montrez que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donnez en une base.
   (b) Montrez que $F = G$.
3. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4
Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$
Montrez que la somme $F + G$ est directe.

Exercice 5 Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
Montrez que $E = F \oplus G$

Exercice 6 On considère les sous espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

1. Trouver une base e_1, e_2 de F et une base e_3, e_4 de G.
2. Calculer $F \cap G$.
3. En déduire que e_1, e_2, e_3, e_4 est libre et constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = z\}$.

1. Déterminez une base de E.
2. Trouver un supplémentaire de E.

Exercice 8 (*) Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 9
Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$.

1. Montrez que E est un sous espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.
2. Montrer que (v, w) est une base de F, et donc que F est également un sous espace vectoriel.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
4. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $a = (2, 4, 7)$. Déterminez les coordonnées de a dans la base (u, v, w).

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (0, 1, 2) \text{ et } v_3 = (1, 2, 3).$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Déterminer une base de F et sa dimension.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = 0\}.$$

4. Déterminer un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
6. On considère $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + 3y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de G. Quelle est sa dimension ?
7. Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?
8. F et G sont-ils en somme directe ?
9. Sans chercher à déterminer une base de $F + G$, donner la dimension de $F + G$.
10. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Chapitre 16 : compléments sur les espaces vectoriels
Feuille d'exercices

Exercice 1 Soient $u = (1, 2, 3)$; $v = (0, 1, -1)$; $w = (1, 3, 2)$; $z = (0, 0, 0)$; $t = (2, 4, 6)$ et soit $\mathcal{F} = (u, v, w, z, t)$. Extraire une base de $\mathcal{F}$.

Exercice 2 (*) Sur la dimension d'espaces vectoriels.

1. Montrer que l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ puis celle de $A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, -1, 1), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$$

1. Quel est le rang de la famille (u, v, w) ? Donnez une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
   (a) Montrez que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donnez en une base.
   (b) Montrez que $F = G$.
3. Compléter la famille (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4
Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$
Montrez que la somme $F + G$ est directe.

Exercice 5 Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
Montrez que $E = F \oplus G$

Exercice 6 On considère les sous espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

1. Trouver une base e_1, e_2 de F et une base e_3, e_4 de G.
2. Calculer $F \cap G$.
3. En déduire que e_1, e_2, e_3, e_4 est libre et constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = z\}$.

1. Déterminez une base de E.
2. Trouver un supplémentaire de E.

Exercice 8 (*) Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 9
Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$.

1. Montrez que E est un sous espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.
2. Montrer que (v, w) est une base de F, et donc que F est également un sous espace vectoriel.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?
4. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $a = (2, 4, 7)$. Déterminez les coordonnées de a dans la base (u, v, w).

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (0, 1, 2) \text{ et } v_3 = (1, 2, 3).$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
2. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Déterminer une base de F et sa dimension.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax + by + cz = 0\}.$$

4. Déterminer un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
6. On considère $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + 3y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de G. Quelle est sa dimension ?
7. Déterminer une base de $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?
8. F et G sont-ils en somme directe ?
9. Sans chercher à déterminer une base de $F + G$, donner la dimension de $F + G$.
10. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$.